Trabajo y Energía
Apuntes

Energía

La energía está presente en el Universo en varias formas. Todo proceso físico que ocurra en el Universo involucra energía y transferencias o transformaciones de energía.

El concepto de energía se aplica a sistemas mecánicos sin recurrir a las leyes de Newton, lo que permite simplificar algunos problemas.

El manejo del concepto de energía permite comprender fenómenos en los cuáles las Leyes de Newton no son útiles, tales como fenómenos térmicos y eléctricos.

Antes de comenzar a trabajar con la idea de energía, conviene definir el concepto de *Trabajo*

Trabajo

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre un determinado sistema que se desplaza a lo largo de una trayectoria entre el punto inicial *A* y el punto final *B* está dado por

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

W = Trabajo

Trabajo – Definición

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

(Ec. 1) Definición de trabajo

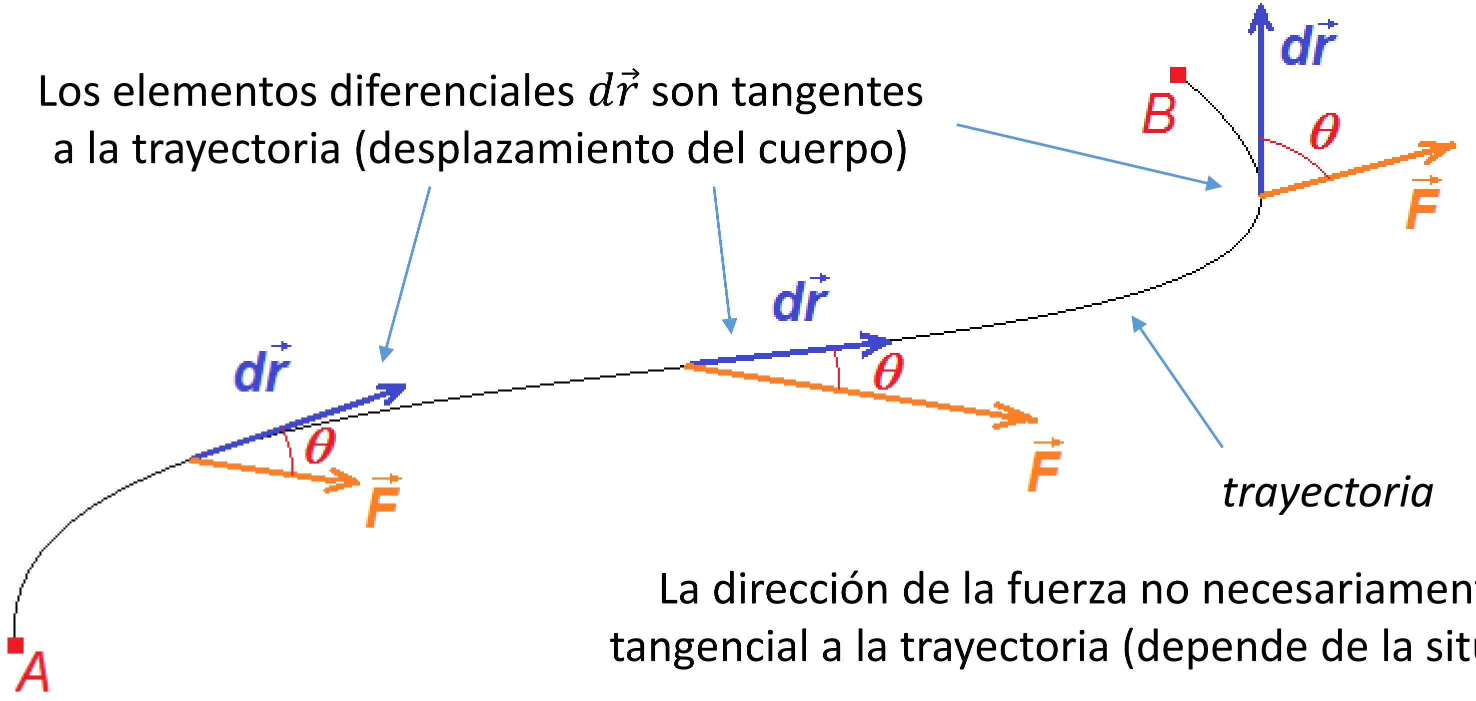
En cada punto de la trayectoria hay que calcular el producto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

Por definición de producto escalar,
$\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}|\ |d\vec{r}|\ cos\theta = F\ dr\ cos\theta$

θ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{r}$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F\ dr\ cos\theta$$

Los elementos diferenciales $d\vec{r}$ son tangentes a la trayectoria (desplazamiento del cuerpo)



La dirección de la fuerza no necesariamente es tangencial a la trayectoria (depende de la situación)

Esta integral de línea se simplifica en muchos casos de interés, como veremos en los siguientes ejemplos….

En particular, si $F = cte.$ y $\theta = cte.$

$$W = \int_A^B F\ dr\ cos\theta = F\ cos\theta \int_A^B dr = F\ d\ cos\theta$$

$$\boxed{W = F\ d\ cos\theta}$$

(Ec. 2) Forma de calcular el trabajo cuando *F*=cte. y *θ*=cte.

Siendo $d = \int_A^B dr$ la distancia total recorrida

Trabajo

Sobre las unidades:

A partir de la definición, **Ec. 1**, $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

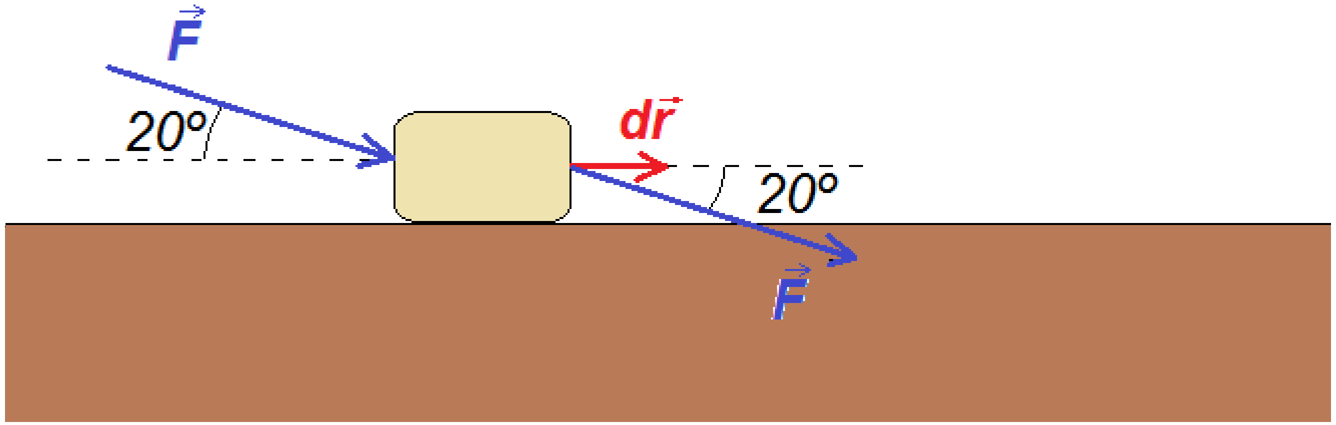
Vemos que las unidades de trabajo en el sistema MKS serán $N \cdot m = \boldsymbol{J}$ **(Joule)**

Veremos más adelante que también la energía se mide en *Joules* en el sistema MKS

Esto es así por cuanto el trabajo W es una transferencia de energía. Si W es el trabajo realizado sobre un sistema y W es positivo, la energía se transfiere *al* sistema; si W es negativo, la energía se transfiere *desde* el sistema.
(aunque esta convención de signos suele modificarse en otras ramas de la Física)

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 1 . Se aplica una fuerza de 4 N sobre un cuerpo de la manera mostrada en la Figura. (a) Hallar el trabajo realizado por la fuerza si el cuerpo se desplaza 5 m hacia la derecha. (La fuerza actúa durante todo el recorrido)



Respuesta: Dado que el desplazamiento del cuerpo es hacia la derecha, podemos decir que el elemento $d\vec{r}$ es un vector que apunta hacia la derecha en cada punto de la trayectoria.

Trasladando los vectores $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ de forma que tengan un origen común, vemos que forman un ángulo de 20º entre sí

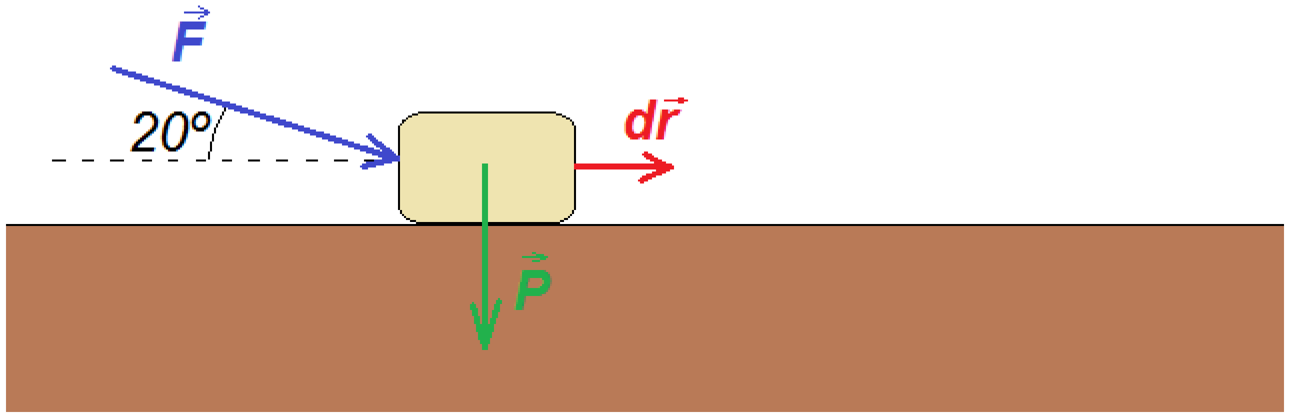
Dado que $F = \left|\vec{F}\right| = 4N = cte.$, y que $\theta = 20° = cte.$, cumplen las condiciones para poder calcular el trabajo mediante la **(Ec. 2)**

Así que $W_F = F\, d \cos\theta = 4N \cdot 5m \cdot \cos 20º = 18.79\ J$

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 1 (continuación) . (b) Hallar el trabajo realizado por la fuerza peso en la situación del problema anterior

Respuesta:



En este caso vemos que el ángulo formado por la fuerza $\vec{P}$ con el elemento de desplazamiento $d\vec{r}$ es 90º, así que, como se cumplen las condiciones para aplicar la **(Ec. 2)** ($F = P = mg = cte.$, $\theta = cte.$)

$$W_P = F\ d \cos\theta = m\ g\ d\ cos90° = m \cdot\ g\ \cdot d\ \cdot 0 = 0\ J$$

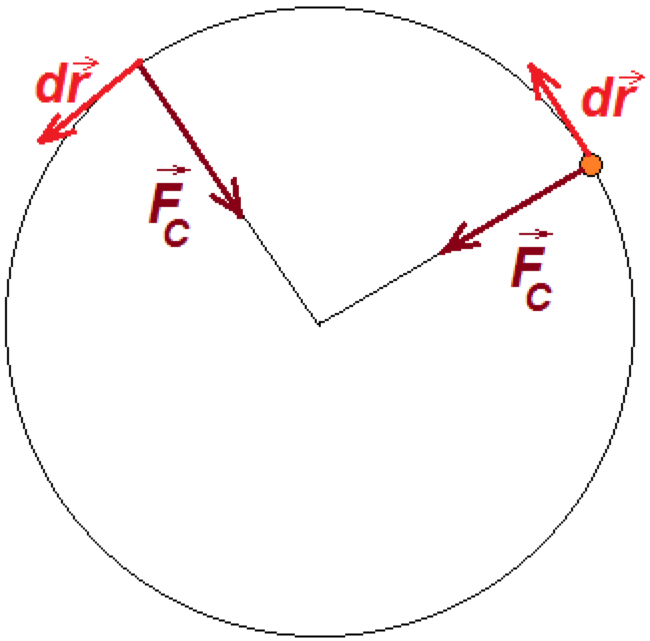
Podemos observar que una fuerza que es en todo punto perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo sobre el sistema.

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 2 . Demuestre que, en un movimiento circular, el trabajo que hace la fuerza centrípeta es nulo.

***Respuesta*.** Sabemos que la fuerza centrípeta (cualquiera sea su origen, es decir, independientemente de que se trate de una tensión, una normal, etc.) apunta siempre en dirección radial, hacia el centro de giro (Figura).

Por otro lado, el cuerpo que gira (ya sea en sentido horario o antihorario), se mueve tangencialmente al círculo



Como puede observarse, en todo punto $\vec{F}_C \perp d\vec{r}$

Por consiguiente,

$$W_{F_C} = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = \int F_C \; dr \underbrace{\cos 90°}_{\boxed{=0}}$$

$$\boxed{W_{F_C} = 0}$$

Trabajo

Consideremos el caso 3-D, en donde las componentes de la fuerza son $\vec{F} = \left(F_x,\ F_y,\ F_z \right)$.

El vector diferencial de desplazamiento se puede escribir como $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

Utilizando la definición de producto escalar como suma de los productos de las componentes, la expresión para el trabajo queda

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \right)$$

A y B son los puntos inicial y final del movimiento considerado.
En el caso 3-D, cada punto queda especificado por 3 coordenadas:
$A = (x_A, y_A, z_A)$ y $B = (x_B, y_B, z_B)$

Para resolver la integral anterior se necesitan, en general, métodos de cálculo avanzados

Para el caso unidimensional a lo largo del eje x:

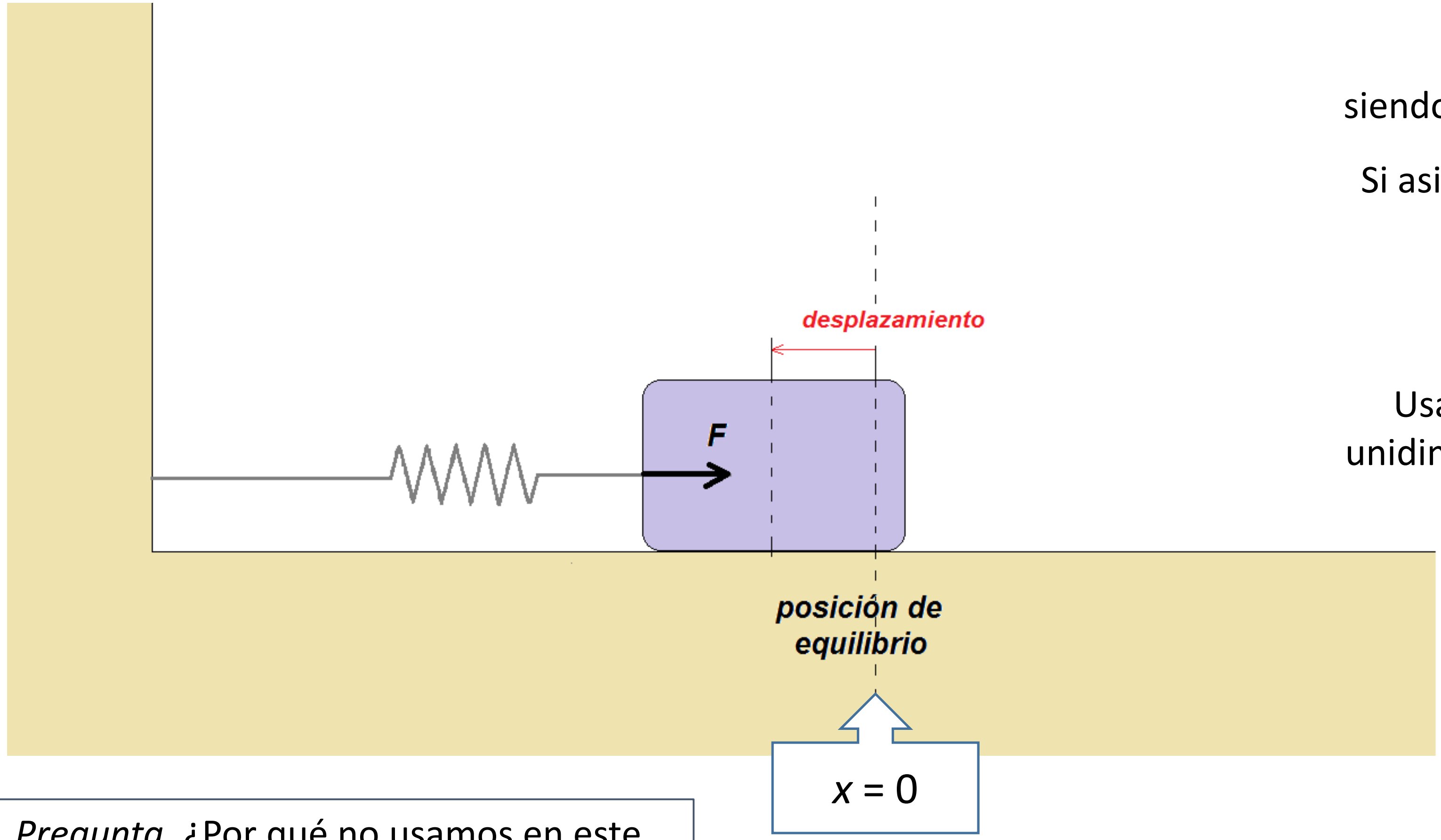
$$\boxed{W = \int_{x_A}^{x_B} F_x\, dx}$$

Expresión para el trabajo en un problema unidimensional

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 3. Trabajo realizado por un resorte. Un cuerpo de masa *m* está sujeto a un resorte de constante elástica *k*. Hallar el trabajo que hace el resorte sobre el cuerpo cuando se lo desplaza desde la posición inicial x_A hasta la posición final x_B

Respuesta. Sabemos que un resorte ideal obedece la Ley de Hooke, siendo la fuerza que ejerce proporcional a su estiramiento (o compresión) desde la posición de equilibrio (Figura)



La fuerza elástica está dada por $F_{el} = -k\Delta x$

siendo Δx la separación desde la posición de equilibrio

Si asignamos el valor $x = 0$ en la posición de equilibrio

entonces $\Delta x = x$, y obtenemos:

$$F_{el} = -k \cdot x$$

Usando la expresión para el trabajo en un problema unidimensional, al desplazar el cuerpo desde x_A hasta x_B:

$$W_{el} = \int_{x_A}^{x_B} F_{el}\, dx = \int_{x_A}^{x_B} -k \cdot x \cdot dx =$$

$$-k \cdot \int_{x_A}^{x_B} x \cdot dx = -k \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_A}^{x_B}$$

$$\boxed{W_{el} = k \cdot \left(\frac{x_A^2}{2} - \frac{x_B^2}{2}\right)}$$

Trabajo realizado por la fuerza elástica desde x_A hasta x_B:

Pregunta. ¿Por qué no usamos en este caso la **Ec. (2)** para calcular el trabajo?

Trabajo - Ejemplos

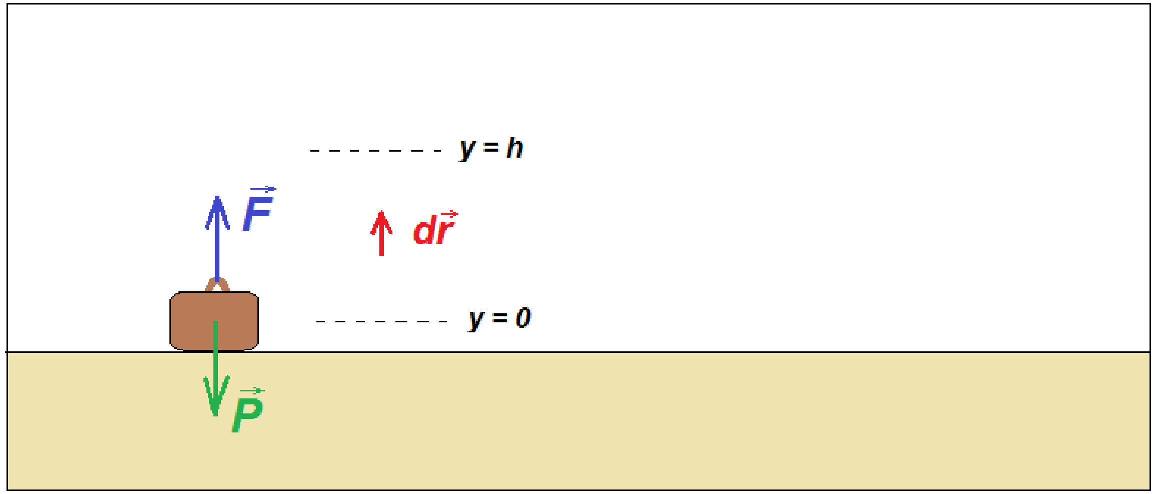
Ejemplo 4. Una valija de masa *M* está apoyada en el suelo. Un hombre se acerca, levanta la valija (supongamos que lo hace con velocidad constante) hasta una altura *h*. Luego camina con la valija una distancia horizontal *d*. Finalmente, baja nuevamente la valija hasta el suelo (supongamos nuevamente que lo hace a velocidad constante). Hallar el trabajo realizado por el hombre sobre la valija en cada etapa.

***Respuesta*.** Analicemos cada etapa por separado.

En la primera etapa el hombre levanta la valija desde $y = 0$ hasta $y = h$, realizando una fuerza $\vec{F}$

Suponemos que levanta la valija con velocidad constante $\Rightarrow$ $a_y = 0$

Por la 2ª Ley de Newton: $F - P = ma_y = 0$ $\Rightarrow$ $F = P = mg$



Como la fuerza aplicada por el hombre es hacia arriba, $\vec{F} \parallel d\vec{r}$ $\Rightarrow$ $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 1$

Como $F = mg = cte.$, y como $\theta = 0° = cte$, podemos calcular el trabajo con la **Ec. 2** :

$$W_{hombre} = F\ d\ cos\theta = m\ g\ d\ cos0° = mgh$$

El hombre realiza sobre la valija un trabajo positivo de valor:

$$W_{hombre} = mgh$$

Pregunta: ¿Qué trabajo hizo la fuerza peso en esta etapa?

Respuesta: $W_{peso} = -mgh$

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 4 (cont.). Una valija de masa *M* está apoyada en el suelo. Un hombre se acerca, levanta la valija (supongamos que lo hace con velocidad constante) hasta una altura *h*. Luego camina con la valija una distancia horizontal *d*. Finalmente, baja nuevamente la valija hasta el suelo (supongamos, nuevamente, que lo hace a velocidad constante). Hallar el trabajo realizado por el hombre sobre la valija en cada etapa.

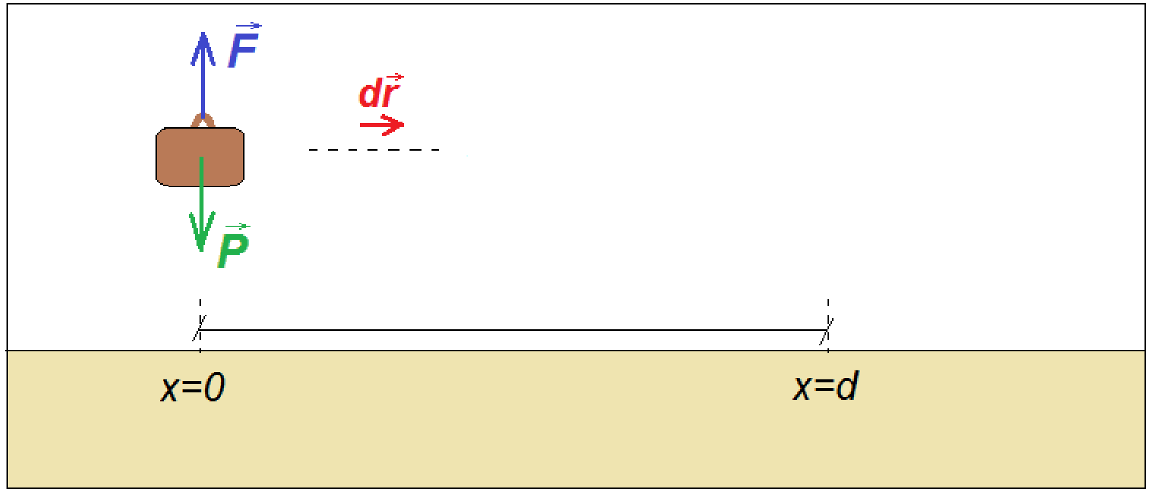
Respuesta.

En la segunda etapa el hombre camina una distancia horizontal d

¿Qué fuerza realiza el hombre sobre la valija en esta etapa?

La fuerza $\vec{F}$ ejercida por el hombre debe ser tal de evitar que la valija caiga.

Entonces $\vec{F}$ debe ser igual en módulo al peso $\vec{P}$ (pero debe tener el sentido contrario)



El vector desplazamiento $d\vec{r}$ tiene dirección horizontal en todo punto.

Podemos ver (Figura), que $\vec{F}$ es $\perp$ a $d\vec{r}$ en todo punto ⇒ $W_{hombre} = F\ d\ cos90° = m\ g\ d\ cos90°$ ⇐ cos 90°= 0

⇒ En esta etapa la persona no realiza trabajo sobre la valija:

$$W_{hombre} = 0\ J$$

Pregunta: ¿Qué trabajo realizó la fuerza peso en esta etapa?

Respuesta: $W_{peso} = 0\ J$

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 4 (cont.). Una valija de masa *M* está apoyada en el suelo. Un hombre se acerca, levanta la valija (supongamos que lo hace con velocidad constante) hasta una altura *h*. Luego camina con la valija una distancia horizontal *d*. Finalmente, baja nuevamente la valija hasta el suelo (supongamos nuevamente que lo hace a velocidad constante). Hallar el trabajo realizado por el hombre sobre la valija en cada etapa.

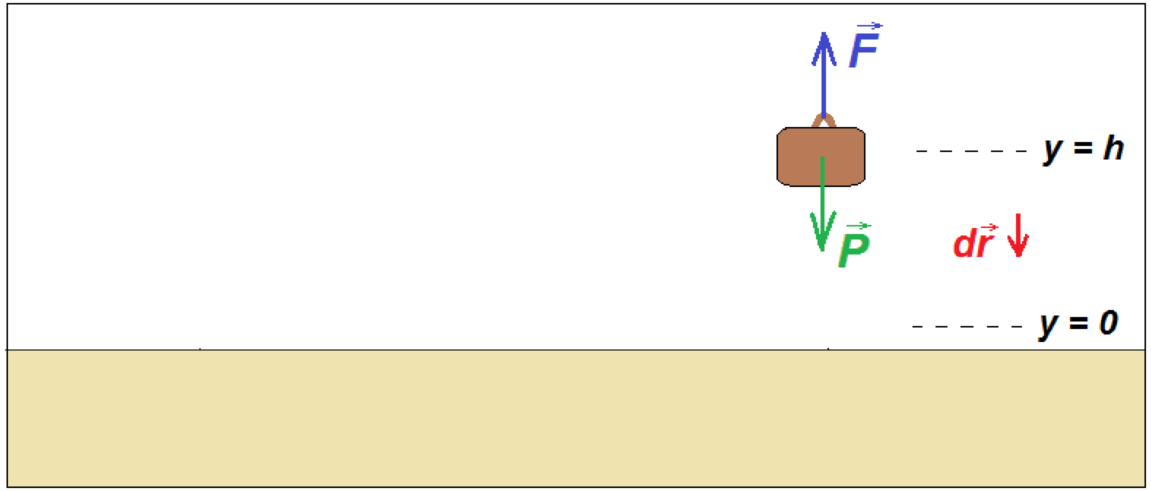
Respuesta.

En la tercera etapa el hombre baja la valija desde $y = h$ hasta $y = 0$

Suponemos que la valija baja con velocidad constante ➡ $a_y = 0$

Nuevamente, $\vec{F}$ debe ser igual *en módulo* al peso $\vec{P}$: $F = P = mg$

(Pero el *sentido* de $\vec{F}$ es opuesto al de $\vec{P}$)



El vector desplazamiento $d\vec{r}$ está dirigido, en todo punto, en el sentido negativo del eje y (Figura)

➡ $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ son antiparalelos (es decir, forman un ángulo de 180º, Figura)

➡ $$W_{hombre} = F\ d\ cos\theta = m\ g\ h\ cos180°$$

cos 180°= -1

➡ En esta etapa la persona realizó un trabajo negativo sobre la valija:

$$W_{hombre} = -mgh$$

Pregunta: ¿Qué trabajo realizó la fuerza peso en esta etapa?

Respuesta: $W_{peso} = mgh$

Potencia - Definición

La ***potencia*** es la cantidad de **trabajo** por unidad de **tiempo** → *definición de potencia*

En fórmula: $\boxed{\boldsymbol{\overline{P} = \frac{W}{\Delta t}}}$

→ La "barra" sobre la ***P*** indica que se trata de un valor medio (promedio) → … y es un valor medio porque Δt es, en gral., un valor finito

→ definición de *potencia media*

Si quisiéramos conocer el valor *instantáneo* de la potencia, deberíamos considerar el trabajo realizado en un tiempo infinitesimal: $\Delta t \rightarrow 0$ → $P = lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t}$ → *potencia instantánea*

Otra fórmula para obtener la potencia instantánea realizada por una determinada fuerza puede obtenerse de la siguiente manera: →

$$P = lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}}$$

→ Otra forma de calcular la *potencia instantánea*

Pregunta: ¿Qué condiciones se deben cumplir para que la potencia media coincida con la potencia instantánea?

Potencia - Unidades

A partir de la definición de potencia... $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$

W: Se mide en Joules, J

Δt: Se mide en segundos, s

La potencia se mide en $\frac{J}{s} = W$ → $\boxed{\textit{Watt}}$

NOTA 2: Si usamos la otra fórmula para el cálculo de potencia que dedujimos en la diapositiva anterior...

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

... deberíamos obtener la misma unidad para la potencia.

Veamos... $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$\vec{F}$: Se mide en Newtons, N

$\vec{v}$: Se mide en m/s

Entonces... $1N \cdot 1\frac{m}{s} = 1\frac{N \cdot m}{s} = 1\frac{J}{s} = 1W$ → Efectivamente, sea cual sea la fórmula que utilicemos, la potencia nos va a dar en Watts

BREVE REPASO SOBRE LA CUESTIÓN DE LAS UNIDADES (en el sistema MKS)

→ La fuerza, F, se mide en Newtons, N → $1N = 1kg\frac{m}{s^2}$

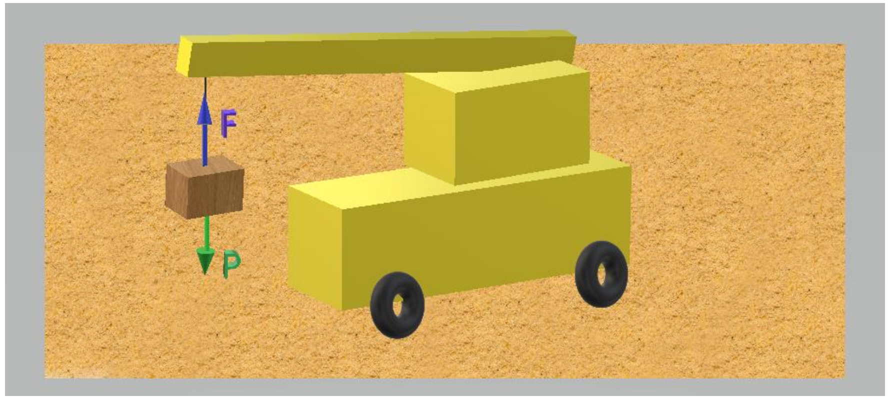
→ El trabajo, W, se mide en Joules, J → $1J = 1N \cdot m = 1kg\frac{m^2}{s^2}$

→ La potencia, P, se mide en Watts, W → $1W = 1J/s = 1kg\frac{m^2}{s^3}$

Potencia - Ejemplo

Ejemplo 5: Calcular la potencia que debe desarrollar una grúa para subir un cuerpo de 1000 kg hasta una altura de 20 m en 30 s.

Respuesta: Para poder levantar el cuerpo, la grúa debe realizar una fuerza hacia arriba que sea, por lo menos, igual al peso del cuerpo



$$F = P = mg$$

y el trabajo realizado al levantar el cuerpo hasta una altura *h* será

$$W = F\ h\ cos\theta = m\ g\ h\ cos0° = m\ g\ h$$

Y la potencia media desarrollada por la grúa será:

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{m\ g\ h}{\Delta t} = \frac{1000kg \cdot 9{,}8m/s^2 \cdot 20m}{30s} \approx 6530\ W = 6{,}53\ kW$$

Fuerzas Conservativas y No Conservativas – Definición

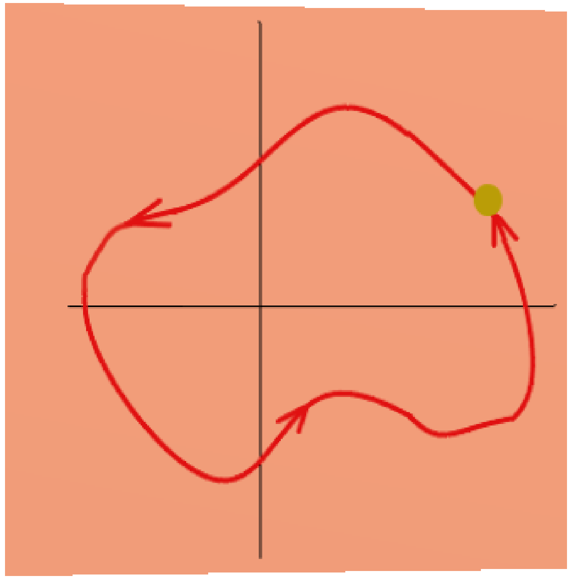
Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza sobre una partícula cuando ésta describe cualquier trayectoria cerrada es nulo.

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Esta relación solamente es válida para las fuerzas *conservativas*.

El círculo indica que la trayectoria es cerrada (es decir, el punto de partida y el de llegada son el mismo)

Existen otras fuerza (llamadas *no conservativas*), que *no* tienen esta propiedad



Fuerzas Conservativas y No Conservativas – Más usuales en Mecánica

Conservativas:

- Peso,
- Fuerza elástica

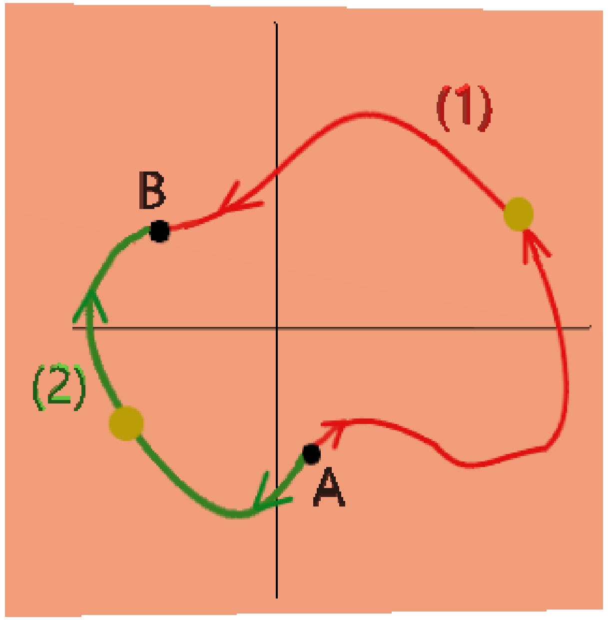
No Conservativas:

- Fuerza de roce

Fuerzas Conservativas y No Conservativas

De la definición de fuerza conservativa se puede demostrar la siguiente propiedad:

"Si una fuerza es conservativa, el trabajo que realiza sobre una partícula entre dos puntos dados es independiente de la trayectoria seguida"



La primera integral es el trabajo realizado por la fuerza entre los puntos A y B siguiendo una trayectoria (1)

$$\underset{(\mathbf{1})}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underset{(\mathbf{2})}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

La segunda integral es el trabajo realizado por la fuerza entre los puntos A y B siguiendo una trayectoria (2)

Demostración: Partiendo de que, para una fuerza conservativa: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

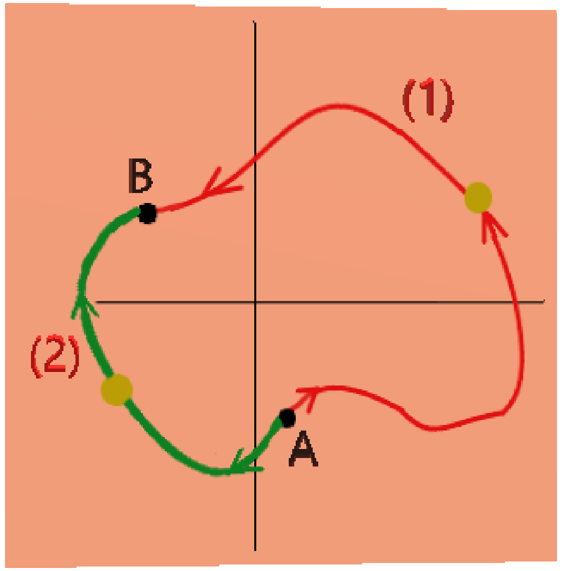
Dividimos la curva cerrada en dos curvas abiertas entre los puntos A y B:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underset{(\mathbf{1})}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \underset{(\mathbf{2})}{\int_B^A} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Y luego invertimos los límites en la 2da integral, que cambia de signo:

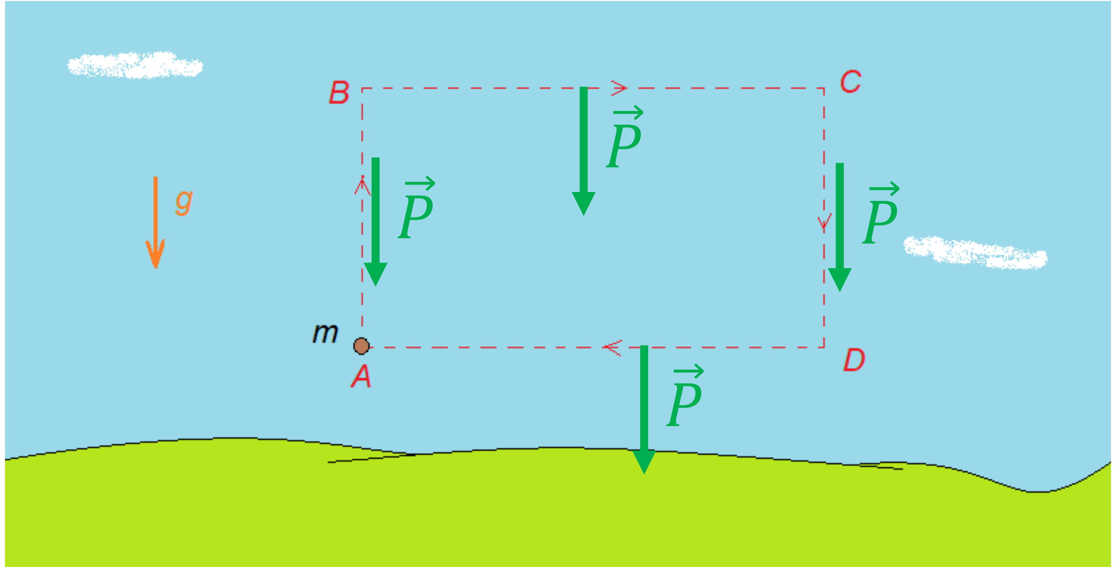
$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underset{(\mathbf{1})}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \underset{(\mathbf{2})}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \underset{(\mathbf{1})}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underset{(\mathbf{2})}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Que es lo que queríamos demostrar



Fuerzas Conservativas y No Conservativas - Ejemplos

Ejemplo 6. Calcular el trabajo que realiza la fuerza peso al moverse una partícula de masa *m* en la trayectoria cerrada *ABCDA* que se muestra en la Figura



Respuesta. Podemos subdividir la integral en la curva cerrada *ABCDA* en cuatro tramos, y calcular el trabajo en cada tramo por separado:

$$\longrightarrow W_{total} = \oint_{ABCDA} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\ d_{AB}\cos(180°) = -mgd_{AB} < 0$$

$$W_{BC} = \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_B^C \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\ d_{BC}\cos(90°) = 0$$

$$W_{CD} = \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C^D \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\ d_{CD}\cos(0°) = mgd_{CD} > 0$$

$$W_{DA} = \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_D^A \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\ d_{DA}\cos(90°) = 0$$

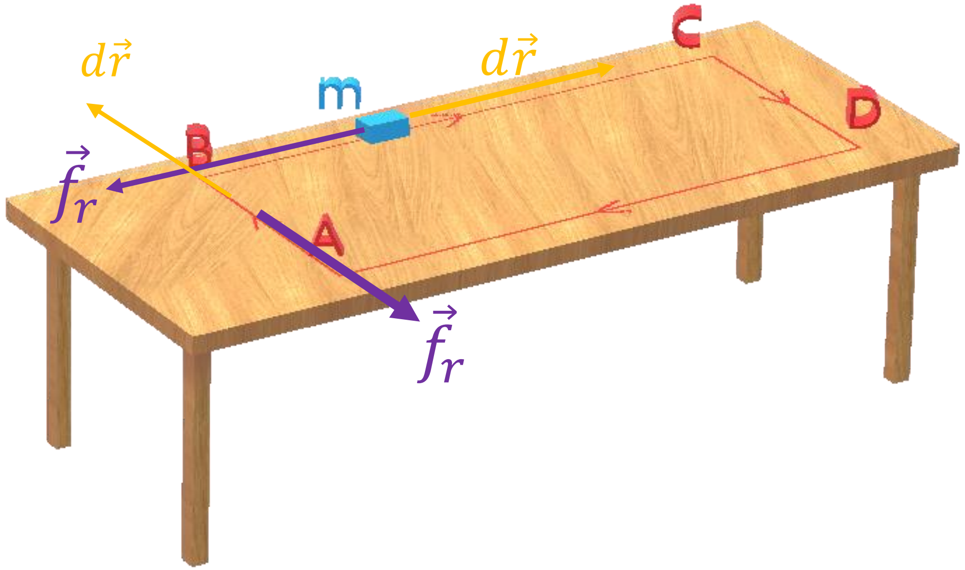
$$\longrightarrow W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = -mgd_{AB} + 0 + mgd_{CD} + 0 = 0\ J$$

$$d_{AB} = d_{CD}$$

El hecho de que el trabajo en una curva cerrada sea *0* se debe a que el peso es una fuerza conservativa

Fuerzas Conservativas y No Conservativas

Ejemplo 7. Se arrastra un cuerpo de masa *m* por una superficie horizontal rugosa describiendo la trayectoria rectangular *ABCDA* que se muestra en la Figura. ¿Cuál será el signo del trabajo realizado por la fuerza de rozamiento?



Respuesta. Podemos separar la integral en la curva cerrada *ABCDA* en cuatro tramos (aunque en este caso no es necesario), y observar que, en cada tramo por separado, la fuerza de roce se dirige en dirección opuesta al desplazamiento. Por consiguiente, el trabajo realizado por la fuerza de roce en cada tramo será negativo:

$W_{AB} < 0$ $\quad W_{BC} < 0$ $\quad W_{CD} < 0$ $\quad W_{DA} < 0$

$$\longrightarrow \quad W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} + W_{DA} < 0$$

El hecho de que el trabajo en una curva cerrada sea ≠ *0* se debe a que el roce no es una fuerza conservativa

Energía Cinética – Definición

La energía cinética E_k es la energía asociada con el movimiento de los cuerpos:

$$\boxed{\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}mv^2}}$$

Nota 1. Esta expresión representa la energía cinética para un cuerpo puntual. Para cuerpos extensos, esta expresión representa la energía cinética asociada con la traslación del cuerpo como un todo, habiendo otro término de energía cinética, asociado con la rotación del mismo

Unidades

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Se mide en kg

Se mide en m^2/s^2

La energía cinética E_k se mide en $kg\frac{m^2}{s^2} = J$

Ejemplo 8: Hallar la energía cinética de un cuerpo de masa *m = 5 kg* que se mueve con velocidad $\vec{v} = 10\frac{m}{s}\check{\imath} - 3\frac{m}{s}\check{\jmath} + 4\frac{m}{s}\check{k}$.

***Respuesta**:* Para calcular la energía cinética solamente interesa el módulo de la velocidad (más estrictamente, el cuadrado del módulo):

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

En este caso: $v^2 = (10\,m/s)^2 + (-3\,m/s)^2 + (4\,m/s)^2 = 100\frac{m^2}{s^2} + 9\frac{m^2}{s^2} + 16\frac{m^2}{s^2} = 125\frac{m^2}{s^2}$

Nota 2. Note que la energía cinética nunca puede tener signo negativo

$$\longrightarrow \quad E_k = \frac{1}{2}\cdot 5\,kg\cdot 125\frac{m^2}{s^2} = \mathbf{312.5\,J}$$

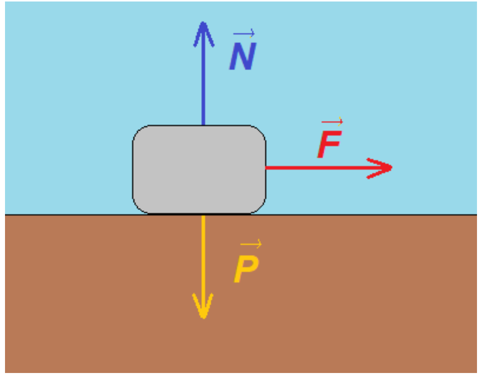
Teorema del Trabajo y la Energía Cinética (Teorema de las Fuerzas Vivas)

"El *trabajo* realizado por la resultante de *todas las fuerzas* que actúan sobre una partícula (trabajo neto) es igual a la *variación de la energía cinética* de dicha partícula."

$$\boxed{\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}}$$

Ejemplo 9: Un cuerpo de masa $m = 5\ kg$ se mueve por una superficie horizontal sin rozamiento bajo la acción de una fuerza horizontal constante $F = 18\ N$. Si el cuerpo parte del reposo, hallar la velocidad adquirida por el cuerpo tras recorrer $20\ m$

Respuesta A – Resolvemos usando conceptos de Cinemática y Dinámica.



- La única fuerza horizontal es $F = 18\ N$ $\longrightarrow$ $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{18\ N}{5\ kg} = 3.6\ m/s^2$

- Podemos calcular el tiempo de recorrido con: $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$

$$\downarrow$$

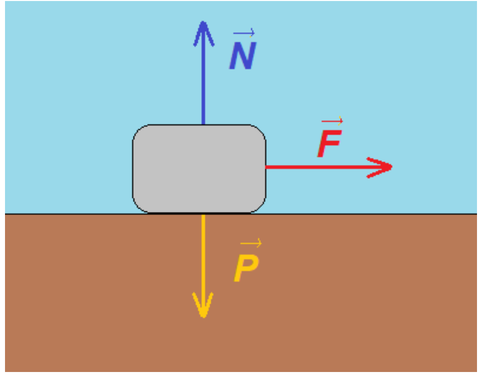
$$20\ m = 0 + 0 + \frac{1}{2}(3.6\ m/s^2)t^2$$

$$\downarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\ m}{3.6\ m/s^2}} = 3.33\ s$$

- Y obtenemos la velocidad final: $v(t) = v_0 + a \cdot t$ $\longrightarrow$ $v_f = v(5\ s) = (3.6\ m/s^2) \cdot 3.33\ s = 12\ m/s$

Ejemplo 9 (continuación): Un cuerpo de masa $m = 5\ kg$ se mueve por una superficie horizontal sin rozamiento bajo la acción de una fuerza horizontal constante $F = 18\ N$. Si el cuerpo parte del reposo, hallar la velocidad adquirida por el cuerpo tras recorrer $20\ m$



Respuesta B – Resolvemos usando el Teorema del Trabajo y la Energía Cinética

La única fuerza que hace trabajo es la fuerza horizontal aplicada (El peso y la normal son perpendiculares al desplazamiento, así que no realizan trabajo)

El trabajo realizado es: $W_F = F \cdot d \cdot cos0° = 18N \cdot 20m = 360\ J$

Usando el Teorema de Trabajo-Energía Cinética:

$$\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}$$

$$E_k^f - E_k^0 = W_F$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}mv_0^2}}_{=0} = 360\ J \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5kg \cdot v_f^2 = 360\ J \longrightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 360\ J}{5\ kg}} = 12\ m/s$$

Teorema del Trabajo y la Energía Cinética

"El *trabajo* realizado por la resultante de *todas las fuerzas* que actúan sobre una partícula (trabajo neto) es igual a la *variación de la energía cinética* de dicha partícula."

$$\boxed{\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}}$$

***Demostración del Teorema (Caso unidimensional)*:**

$$W_{todas\ las\ fuerzas} = \sum_{\substack{todas\ las\\ fuerzas}} \int_{x_0}^{x_f} F\,dx = \int_{x_0}^{x_f} \sum_{\substack{todas\ las\\ fuerzas}} F\,dx = \int_{x_0}^{x_f} m\,a\,dx = m\int_{x_0}^{x_f} m\,\frac{dv}{dt}\,dx = m\int_{x_0}^{x_f} \frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{dt}\,dt =$$

$$= m\int_{t_0}^{t_f} \frac{dv}{dt}\,v\,dt = \frac{1}{2}m\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(v^2)\,dt = \frac{1}{2}m\int_{v_0}^{v_f} d(v^2) = \frac{1}{2}m\,v^2\Big|_{v_0}^{v_f} =$$

$$= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_k^f - E_k^0 = \Delta E_k$$

Energía Potencial

Con las *fuerzas conservativas* se puede asociar una *energía potencial*.

● Con un cuerpo sometido a la acción de la fuerza peso, $\vec{P}$, se asocia una energía potencial gravitatoria:

$$\boxed{E_{P,g} = mgh}$$

siendo h la altura a la que se encuentra el cuerpo.

● Con un cuerpo sometido a la fuerza elástica de un resorte, $\vec{F}_{el}$, se asocia una energía potencial elástica:

$$\boxed{E_{P,el} = \frac{1}{2}kx^2}$$

siendo k la constante del resorte, y x su estiramiento (o compresión).

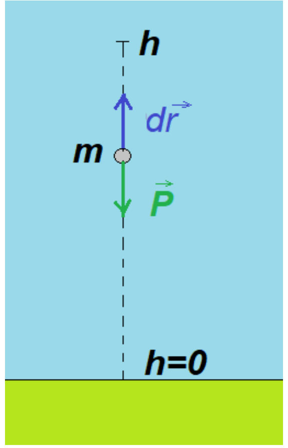
- Las energías potenciales están relacionadas con la configuración de un sistema. Por ejemplo, la energía potencial gravitatoria $E_{P,g}$ depende de la distancia relativa h entre el cuerpo de masa m y el planeta Tierra; en este caso, el sistema en cuestión es el sistema masa-Tierra. La energía potencial $E_{P,el}$ depende del estiramiento o compresión x del resorte; el sistema es el compuesto por la masa y el resorte.
- En contraposición, recordemos que la energía cinética está asociada con el movimiento de un cuerpo, a través de su velocidad.
- Se acostumbra referirse a la energía potencial como energía “almacenada” por causa de la configuración del sistema.
- Las fuerzas no conservativas (por ejemplo el roce) no se asocian con una energía potencial.

Energía Potencial

¿Cómo se obtuvieron las fórmulas anteriores?

La *energía potencial asociada a una fuerza conservativa* se puede obtener como el *trabajo (con signo cambiado)* que realiza dicha *fuerza* sobre una partícula cuando ésta se mueve desde una posición inicial (en donde suponemos que la energía potencial vale *0*) hasta otra posición de interés.

Energía potencial gravitatoria (en las cercanías de la Tierra): Se acostumbra tomar el *0* de la energía potencial sobre la superficie de la Tierra

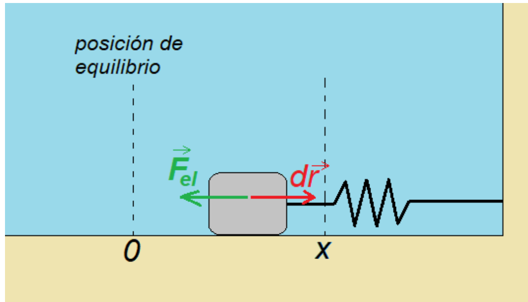


Al moverse un cuerpo de masa m desde el piso hasta una altura *h*, el trabajo (con signo cambiado) que realiza la fuerza peso, será:

$$-W_P = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{P} \cdot d\vec{r} = -P\, h \cos 180° = -mgh\,(-1) = mgh = E_{P,g}$$

(que es la fórmula de la energía potencial gravitatoria)

Energía potencial elástica: Se acostumbra tomar el *0* de la energía potencial para el resorte sin deformar (ni comprimido ni estirado)



Al moverse un cuerpo de masa m una distancia x comprimiendo o estirando el resorte, el trabajo que realiza la fuerza elástica (con signo cambiado) será:

$$-W_{el} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = -\int_0^x |\vec{F}_{el}|\, |d\vec{r}| \cos 180° = -\int_0^x kx\, dx\,(-1) = k\int_0^x x\, dx = \frac{1}{2}kx^2 = E_{P,el}$$

(que es la fórmula de la energía potencial elástica)

Energía Mecánica - Definición

La ***energía mecánica*** es la suma de la energía cinética con los diferentes términos de energía potencial.

$$\boxed{E_M = E_k + E_P}$$

$$E_P = E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots$$

$$\boxed{E_M = E_k + E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots}$$

En esta materia solamente consideraremos dos tipos de energía potencial: la gravitatoria y la elástica. Pero no son los únicos dos tipos que existen…

Ejemplo 10: Hallar la energía mecánica de los siguientes sistemas:

(a) Un bloque de masa $m = 4\ kg$, que se encuentra en reposo a 20 m de altura;

(b) Un bloque de masa $m = 4\ kg$ que se encuentra a 20 m de altura y se mueve hacia arriba a 10 m/s;

(c) Un bloque de masa $m = 4\ kg$ que se encuentra a 20 m de altura y se mueve hacia abajo a 10 m/s;

(d) Un bloque de masa $m = 4\ kg$ que se encuentra a 20 m de altura y se mueve hacia arriba a 10 m/s mientras comprime 5 cm un resorte de constante elástica $k = 1000\ N/m$;

Respuestas:

(a) $E_M = 784\ J$

(b) $E_M = 984\ J$

(c) $E_M = 984\ J$

(d)$E_M = 985{,}25\ J$

Energía Mecánica - Definición

La ***energía mecánica*** es la suma de la energía cinética con los diferentes términos de energía potencial.

$$\boxed{E_M = E_k + E_P}$$

$$E_P = E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots$$

$$\boxed{E_M = E_k + E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots}$$

En esta materia solamente consideraremos dos tipos de energía potencial: la gravitatoria y la elástica. Pero no son los únicos dos tipos que existen…

Para un sistema mecánico que evoluciona desde una situación inicial (*0*) hasta una situación final (f), la variación de su energía mecánica será:

$$\Delta E_M = E_M^f - E_M^0 = \left(E_k^f + E_{P,g}^f + E_{P,el}^f\right) - \left(E_k^0 + E_{P,g}^0 + E_{P,el}^0\right) = \left(E_k^f - E_k^0\right) + \left(E_{P,g}^f - E_{P,g}^0\right) + \left(E_{P,el}^f - E_{P,el}^0\right)$$

$$\longrightarrow \quad \Delta E_M = \Delta E_k + \underbrace{\Delta E_{P,g} + \Delta E_{P,el}}$$

Por Teorema de Trabajo – Energía Cinética:

$$\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}$$

Por definición de las Energías Potenciales:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_{P,g} &= -W_{Peso} \\ \Delta E_{P,el} &= -W_{F_{elástica}} \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

Debería haber un término para cada fuerza conservativa

Energía Mecánica - Variación

$$\Delta E_M = \Delta E_k + \underbrace{\Delta E_{P,g} + \Delta E_{P,el}}$$

Por Teorema de Trabajo – Energía Cinética:

$$\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}$$

Por definición de las Energías Potenciales:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_{P,g} &= -W_{Peso} \\ \Delta E_{P,el} &= -W_{F_{elástica}} \\ &\dots \end{aligned}\right\}$$

Debería haber un término para cada fuerza conservativa

Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta E_P &= \Delta E_{P,g} + \Delta E_{P,el} + \cdots \\ &= -W_P - W_{F_{el}} - \cdots \\ &= -W_{fuerzas\ conservativas} \end{aligned}$$

$$\Delta E_M = \Delta E_k + \Delta E_P$$

$$\Delta E_M = W_{\substack{todas\ las \\ fuerzas}} - W_{\substack{fuerzas \\ conserv.}}$$

¿Qué nos queda tras la resta?

Ley de Conservación de la Energía Mecánica

¿Qué nos queda tras la resta?
En $W_{\substack{todas\ las\\ fuerzas}}$ se incluyen *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula, tanto externas como internas, conservativas y no conservativas.

$$\Delta E_M = \Delta E_k + \Delta E_P$$

$$\Delta E_M = W_{\substack{todas\ las\\ fuerzas}} - W_{\substack{fuerzas\\ conserv.}}$$

¿Qué nos queda tras la resta?
Por otro lado, cuando construimos cada término de la energía potencial, hemos extendido nuestro sistema de forma de incluir tanto a la partícula de interés como al agente que origina la fuerza (el planeta Tierra, el resorte,…). Por consiguiente, el término $W_{\substack{fuerzas\\ conserv.}}$ se refiere a las fuerzas conservativas internas al sistema.

Fuerzas externas	~~Fuerzas internas conservativas~~
	Fuerzas internas no conservativas

$$\boxed{\Delta E_M = W_{f.n.cons.} + W_{ext.}}$$

Esta es una de las formas en que se puede enunciar la *ley de conservación de la energía mecánica*

Conservación de la Energía Mecánica en Sistemas Aislados con Fuerzas Conservativas

"En un sistema *aislado* donde *sólo intervienen fuerzas conservativas*, la energía mecánica permanece constante"

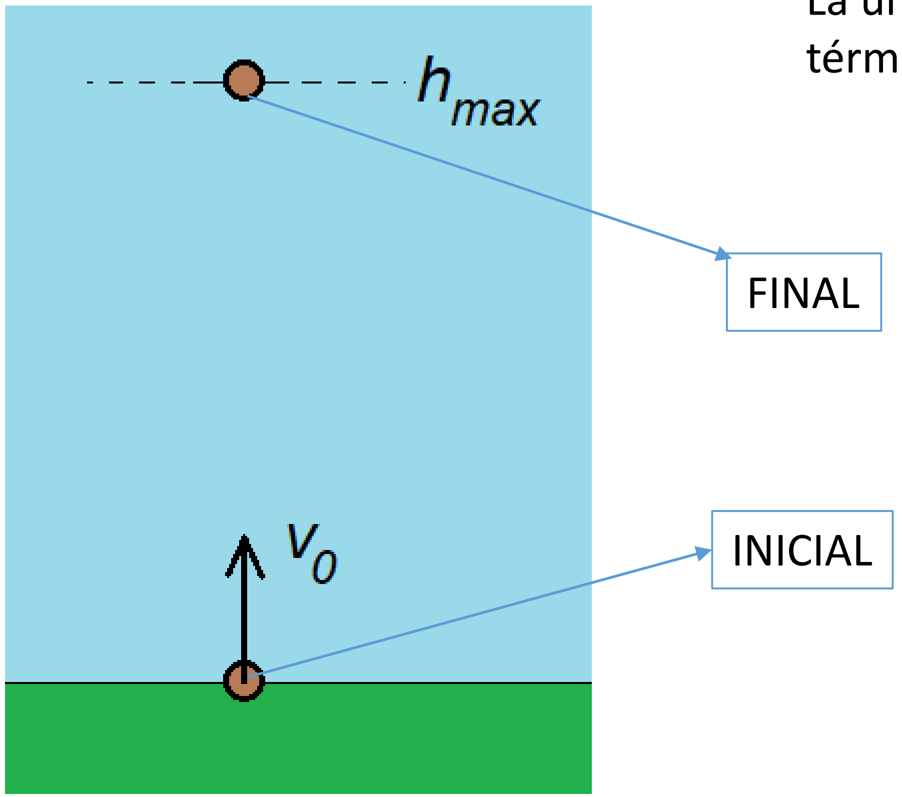
$$\Delta E_M = 0$$

Este resultado se desprende de la forma más general del Teorema de Conservación de Energía desarrollado en las diapositivas anteriores, ya que:

- Si el sistema está aislado, no intervienen fuerzas externas al sistema. $\longrightarrow$ $W_{ext} = 0$
- Como establece el enunciado, tampoco hay fuerzas no conservativas interiores al sistema. $\longrightarrow$ $W_{f.n.cons.} = 0$

Ejemplo 11: Hallar la altura máxima que alcanzará un cuerpo de $m = 5\ kg$ lanzado desde el suelo verticalmente con una velocidad de $30\,\frac{m}{s}$ (despreciar el rozamiento)

Respuesta:



La única fuerza que interviene es el peso, y su acción está contemplada en el término de energía potencial gravitatoria

$$\Delta E_M = W_{f.n.cons.} + W_{ext.}$$

$$E_M^f - E_M^0 = 0$$

$$mgh_{max} - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{(30\ m/s)^2}{2 \cdot 9{,}8\ m/s^2} = 45{,}92\ m$$

Ejercicio:
Resuelva el mismo problema utilizando los métodos de dinámica y cinemática. ¿Cuál de los dos procedimientos es más sencillo?